PRESENTACIÓN ASPECTOS VISUALES EN PROBLEMAS DE CÁLCULO Y ANÁLISIS

María de Jesús Acuña, Nancy Janeth Calvillo y Ricardo A. Cantoral
Cinvestav del IPN, México D.F.
macuna@cinvestav.mx, nancycalvillo@gmail.com, rcantor@cinvestav.mx
Laboratorio Didáctico

Resumen

Este escrito muestra la descripción de algunas actividades referidas a las materias de Cálculo y Análisis Real. Dichas actividades fueron diseñadas en el marco de dos trabajos de tesis con objetivos de investigación diferentes, sin embargo relacionados en el aspecto de la visualización, es así que nuestro enfoque es principalmente el análisis de los aspectos visuales de conceptos tales como la derivada, la integral y la convergencia de sucesiones numéricas infinitas.

Palabras Clave: Visualización, Variación e Intuición.

Introducción

Uno de los objetivos centrales de la Matemática Educativa consiste en elaborar descripciones sobre el funcionamiento del *sistema didáctico* y de los *fenómenos didácticos* que en él suceden (Dolores, 2000). Además las investigaciones en Matemática Educativa que han sido llevadas a cabo en la materia de Cálculo señalan que el estatus y naturaleza de sus conceptos tiene un énfasis significativo en los aspectos formales dejando de lado otras dimensiones (Cordero, 2005). De esta manera, nuestras actividades surgen como alternativas de aprendizaje de conceptos de Cálculo y Análisis.

Las actividades que presentaremos son la conjunción de dos trabajos de tesis con diferentes objetivos de investigación, que sin embargo coinciden en el aspecto de la visualización, entendiendo a esta como la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información, asimismo visualizar no se reducirá al acto de ver las diversas representaciones de un objeto matemático (Cantoral y Montiel, 2001).Considerando lo anterior, haremos la presentación de las actividades en dos partes:

- La primera parte comprende los aspectos visuales en el área del Cálculo.

En ese sentido revisamos investigaciones (Cáceres, 1997; Cantoral y Farfán, 1997; Galindo, 1998) en donde se han reportado varias de las dificultades que presentan los estudiantes en torno a los conceptos del cálculo diferencial e integral como lo son: razón de cambio promedio, razón de cambio instantáneo, dificultades en entender a la tangente como el límite de las rectas secantes, etc. Las causas atribuidas a esta problemática están relacionadas fundamentalmente, con una inadecuada planificación y ejecución del proceso de enseñanza, además de que la mayoría de las veces los programas no son vistos en el tiempo destinado para ello, y que el profesor usa métodos muy expositivos y poco participativos (Dolores, 2000).

Por otro lado Barrera (2002) y Dolores (2000) encontraron que en los cursos tradicionales de cálculo diferencial e integral, se prioriza el manejo operativo de límites, reglas de derivación y reglas de integración, sin considerar una gran variedad de situaciones que están vinculadas al concepto, como lo son: la noción de límite, función, variación y noción de aproximación, minimizando así su significado geométrico y prácticamente reduciendo a cero su relación con la variación física, además de que el tratamiento algebraico del proceso inverso derivación e integración es mediante el Teorema Fundamental del Cálculo, sin embargo visualmente no es inmediato.

Es así que en esta investigación nos interesamos en mostrar una forma de visualizar dicho proceso. Con este objetivo en mente diseñamos una secuencia, con la cual pretendemos a través de diversas actividades guiar al estudiante a encontrar la relación visual del proceso derivación e integración. Para esto nos guiamos por la metodología de la ingeniaría didáctica[1] que tiene su sustento teórico en la teoría de situaciones didácticas[2]. Este trabajo está inmerso en la línea de investigación del Pensamiento y Lenguaje Variacional[3].

- En la segunda parte, proponemos una presentación alternativa de la Convergencia de Sucesiones Numéricas Infinitas.

En este sentido encontramos diversos trabajos de investigación (Alcock y Simpson, 2004 y 2005; Cantoral y Reséndiz, 1997; Crespo, 2005; Polya, 1966; Robert, 1982) que reconocen la importancia de la intuición y la visualización al estudiar temas matemáticos como los que nos atañen. Es así que la intuición será entendida como la captación primera de conceptos que nos permite comprender lo que nos rodea (Crespo, 2005), sin embargo, como afirma Fischbein (1987) un modelo intuitivo no será necesariamente una reflexión directa de cierta realidad (muchas veces estará basado en una interpretación abstracta de esa realidad)).

Por otro lado, el paradigma de la enseñanza que se sigue en el sistema educativo está centrado fundamentalmente en enfoques axiomático deductivos y en la mera resolución de problemas (Cantoral y Montiel, 2003). Este paradigma, que hemos identificado al abordar la enseñanza actual del tema de “Convergencia de sucesiones numéricas” se basa en un enfoque tradicional en el que se estudia primero la teoría de sucesiones numéricas infinitas y posteriormente la teoría de series numéricas infinitas y de funciones.

---

[1] Una descripción de la ingeniería didáctica aparece detallada en Artigue (1995).

[2] La teoría de situaciones didácticas, introducida por G. Brousseau (1986), proviene de una teoría para el control de situaciones de enseñanza en su relación con la producción matemática del conocimiento. Los sistemas didácticos considerados distinguen tres componentes mutuamente interrelacionadas: el maestro, el estudiante y el conocimiento.

3 El PyLV es una línea de investigación que se ocupa de estudiar los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el sistema social, pone particular atención en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales, esta línea de investigación posee una triple orientación: lo cognitivo, lo didáctico y lo socio-epistemológico (Cantoral y Farfán, 1998).

Con respecto a la teoría de convergencia de series, en (Farfán, 1997) se señala que en la historia de las ideas se pueden identificar dos grandes momentos claramente diferenciados para su tratamiento: el primero se refiere al surgimiento del cálculo de límites de algunas series particulares y el segundo al surgimiento de una teoría general para la convergencia de series. Además, se identifica al trabajo de J. Fourier (1882) sobre la conducción del calor como el medio en el que se reconoció necesario el estudio de la convergencia como concepto autónomo. Visto así, el problema físico y el concepto matemático son indistinguibles en ese contexto (Farfán, 1997). Fue entonces que A. L. Cauchy se dio a la tarea de trabajar en la elaboración de criterios de convergencia de series, mismos que tuvieron origen en la comparación con series cuya suma es conocida. Es así que según Farfán (Ob. cit.) cuando los momentos 1 y 2 antes descritos, se unen, es decir, se une lo particular con lo general, es que surge la teoría de sucesiones, a manera de formalización. Sin embargo, hoy en día ambos fenómenos son equivalentes en el tratamiento que los textos escolares hacen del tema; no obstante, en el terreno conceptual esto no es así.

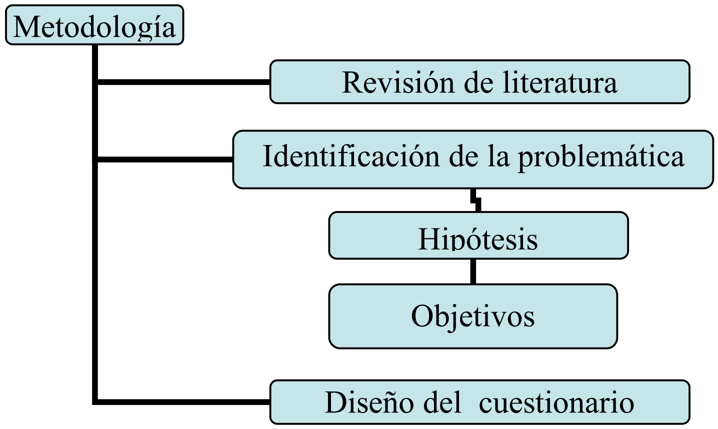
De esta manera identificamos en “La convergencia de Sucesiones Numéricas Infinitas” un escenario natural para poder explorar cómo la intuición y visualización de su teoría, influye en un alumno, pretendiendo establecer un proceso de comunicación de las ideas en situación escolar con el fin de de que los alumnos puedan construir la noción de Convergencia de Sucesiones, es decir, nuestra investigación propone estudiar la teoría de sucesiones atendiendo su construcción social, dando un tratamiento intuitivo del tema, por medio de la visualización antes que de lo riguroso y formal. Ello en virtud de que en su origen, las demostraciones de algunos de los teoremas relativos a sucesiones se dejaban a la interpretación de los lectores, en el entendido que podrían ser visualizadas o intuidas por ellos:

> “Como en todos los casos en los cuales se trata de la convergencia de una sucesión, Cauchy gusta de obviar todos los detalles al considerarlos evidentes”
>
> (Cauchy, 1821/1994, p. 165)

Con base en las ideas anteriores diseñamos algunas actividades, en las cuales se trata de no enfocarse solamente en el aspecto axiomático – deductivo y los aspectos formales con los que suele presentarse este contenido, sino que se incluyen aspectos tales como los intuitivos y los visuales para el estudio del mismo. De esta manera, nuestro objetivo es consolidar en los estudiantes la noción de convergencia de sucesiones numéricas infinitas mediante un trato intuitivo de las sucesiones por medio de la visualización de una particular representación gráfica en un solo eje. Esta investigación es llevada a cabo siguiendo la Aproximación Socioepistemológica de la Investigación en Matemática Educativa.

Metodología

Enseguida describimos a grandes rasgos la metodología que empleamos para el diseño de las secuencias.



Diseño correspondiente a la Primera Parte

En un curso tradicional de Cálculo diferencial e Integral, se afirma que la derivación y la integración son procesos inversos, lo cuál se puede y de hecho se hace, probarlo algebraicamente mediante el Teorema Fundamental del Cálculo, Sin embargo, nos cuestionamos, en el contexto gráfico ¿en qué consiste lo inverso, si la derivada puede interpretarse como la pendiente de la recta tangente en un punto, y la integral puede representarse como el área bajo la curva en una cierta región? Incluso, podemos preguntarnos ¿en que sentido son inversas la tangencia y la cuadratura?

Tratando de hacer explicito este hecho, diseñamos una secuencia de actividades que tiene como objetivo que a través de los diferentes sistemas de representación (el gráfico, numérico, analítico, algebraico), el estudiante pueda visualizar la relación que existe entre el proceso derivación e integración. Para esto, se proponen ciertas actividades con un objetivo especifico, por lo que de la actividad 1 a la 5 se quiere analizar cuáles son las nociones que el estudiante tiene con respecto a los conceptos derivación e integración y con cuál representación gráfica lo relacionan. Posteriormente de la actividad 5 a la 10 se espera que el estudiante utilice sus nociones básicas sobre dichos conceptos para que mediante la interacción con las actividades del tipo de una ecuación diferencial y con apoyo del método de Euler, el estudiante pueda generar argumentos visuales y así pueda reconocer la relación que existe ente los procesos derivación e integración.

Secuencia de Actividades

En seguida se muestran las actividades:

1. ¿Cómo explicarías a un estudiante de bachillerato el concepto de derivada y qué argumento geométrico utilizarías?
2. ¿Cómo explicarías a un estudiante de bachillerato el concepto de integral y qué argumento geométrico utilizarías?
3. Suponga que $f(x)$ representa la gráfica de cierta función:

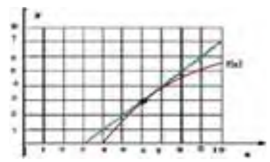
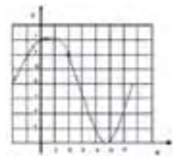


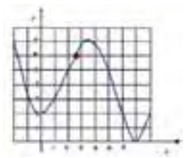
Figura 2.

¿Cuál es la derivada en $x = 6$ de la función f ? Justifica tu respuesta.

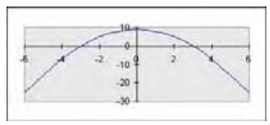
a) 3 b) 6 c) 2 d) 1

4. Dibuja la tangente a la curva que pase por el punto indicado y estima su pendiente m . Justifica tu respuesta.





5. Sea $f(x)$ una función par, cuya gráfica es:



Considera que:

$$i)\int_0^3 f(x)dx = 18$$

$$ii)\int_3^6 f(x)dx = -36$$

Contesta las siguientes preguntas y justifica tus respuestas.

a) ¿Cuál es el área bajo la curva de $f(x)$ en el intervalo [0,3]?
b) ¿Cuál es el área bajo la curva de $f(x)$ en el intervalo [-3,0]?
c) ¿Cuál es el área bajo la curva de $f(x)$ en el intervalo [-3,3]?
d) Encuentra el valor de: $\int_{-3}^{3} f(x)dx$
e) ¿Cuál es el área bajo la curva de $f(x)$ en el intervalo [0,6]?
f) Encuentra el valor de: $\int_{0}^{6} f(x)dx$
g) Encuentra el valor de: $\int_{-3}^{6} f(x)dx$

6. De la función $f(x) = x^2$ sabemos que su gráfica es una parábola cuyo vértice es el origen y concavidad hacia arriba; al obtener la derivada resulta otra función que es de primer grado (una recta). Este proceso se estudió en Cálculo Diferencial (Figura 1), pero en Cálculo Integral se tiene el proceso inverso, porque a la función derivada hay que aplicarle el proceso de integración (Figura 2).

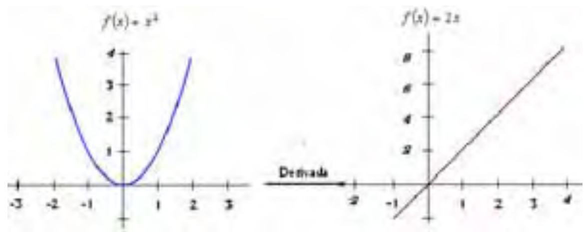


Figura 1.

¿Puedes inferir qué gráfica obtendrás? Explica.

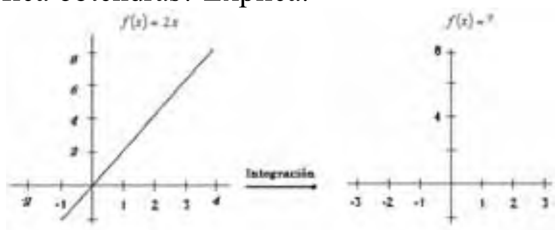


Figura2.

7. Considera la ecuación diferencial $y(x) = y'(x)$, y completa la siguiente tabla considerando los distintos valores para x.

x	$y(x)$	$y'(x)$
0		
0.5		
1		
1.5		
2		
2.5		

a) Localiza los puntos en el plano para trazar la gráfica de $y(x)$ y muestre un segmento de línea tangente en cada uno de los puntos localizados.

b) Traza la gráfica de $y'(x)$

c) Encuentra una solución para la ecuación diferencial $y' = y$ y bosqueja su grafica.

d) Explica ¿por qué la gráfica de la función solución de la ecuación $y' = y$ no puede cruzar el eje de las x?.

Para conocer el comportamiento cualitativo de la solución de una ecuación diferencial del tipo:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad y(a) = b,$$

de manera gráfica, se siguen los siguientes pasos:

1. Toma una colección de puntos $(x, y) \in R^2$ y dibuje un segmento de recta que tenga pendiente $m = f(x, y)$. El conjunto de estos segmentos de recta se conoce como *Campo Direccional.*
2. Traza la curva solución haciendo pasar por los puntos de tal manera que los segmentos de recta sean tangentes a esta curva.

8. El siguiente **campo direccional** corresponde a la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{x}{y}\right)^2 \qquad y(x_0) = y_0,$$

traza varias curvas solución para la ecuación dada, como se indica en el paso dos, antes mencionado.

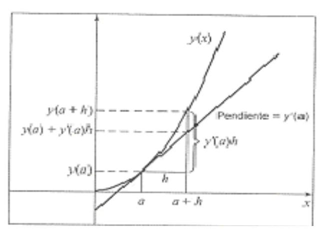
En cálculo con frecuencia encontramos conveniente aproximar la gráfica de una función diferenciable $y(x)$ cercana a un punto $x = a$, por medio de su línea tangente a ese punto.

$$y(x) \approx y(a) + y'(a)(x-a) \quad \ldots \qquad (1)$$

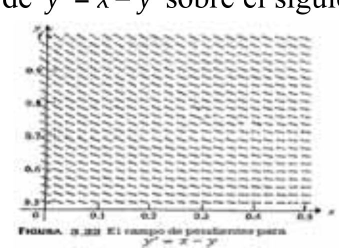
Una de las técnicas más simples para aproximar soluciones de una ecuación diferencial $y' = g(x, y)$ sujeta a la condición inicial $y(x_0) = y_0$, es el método de Euler, o de las rectas tangentes. Esta basado, precisamente, en la aproximación local de una función mediante rectas tangentes. Si en la ecuación (1), reemplazamos $x - a$ por h, tendremos:

$$y(a+h) \approx y(a) + y'(a)h,$$

esta aproximación se conoce como aproximación lineal, y es la fórmula del método de Euler, gráficamente se representa de la siguiente forma:



9. Sea la ecuación diferencial $y' = x - y$, junto con una condición inicial $y(0) = 1$. La figura (3.22) muestra el campo de pendientes para la ecuación dada y la condición inicial $(0,1)$, a partir del cual podríamos trazar varias curvas solución.
   a) Traza dos curvas solución de $y' = x - y$ sobre el siguiente campo de pendientes.

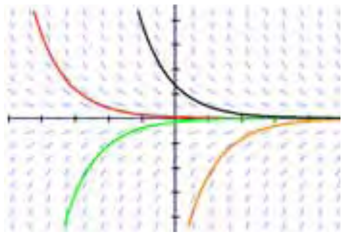


   b) Utilizando la fórmula de Euler, encuentra una aproximación numérica para $y(x)$, cuando $x = 0.5$.

10. Considere las siguientes ecuaciones diferenciales con su respectiva condición inicial.

a) $\frac{dy}{dx} = x + y \quad y(0) = 1$ b) $\frac{dy}{dx} = -y \quad y(x_0) = y_0$

Identifica cuál de éstas ecuaciones corresponde al siguiente campo de pendiente. Justifica tu respuesta.



Diseño correspondiente a la Segunda Parte

Para la realización de las Actividades correspondientes a la Segunda Parte, es fundamental considerar las siguientes cuestiones en las que se involucra el objetivo de nuestra investigación:

¿Cómo es que un estudiante podrá intuir la convergencia de una sucesión, o cómo sabrá si un enunciado sobre convergencia de sucesiones es verdadero? Mientras el estudiante tenga más información acerca de las sucesiones, su intuición se podrá aproximar más a las ideas que maneja la lógica con respecto a sucesiones. Uno de los factores que influirá para que su intuición con respecto a la convergencia de sucesiones sea acertada, es la experiencia que tenga en convergencia de sucesiones. Pero ¿cómo es que un alumno podrá adquirir experiencia en la convergencia de sucesiones? Consideramos que la adquirirá mediante la visualización de sucesiones convergentes y de determinadas situaciones en las que se encuentran las sucesiones. Entonces ¿Cómo es que se podrá visualizar una sucesión convergente? ¿Cómo es que logrará representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual acerca de convergencia de sucesiones numéricas? En nuestra opinión, para lograr lo anterior, creemos que se debe trabajar en la construcción de ejemplos y representaciones gráficas de sucesiones numéricas en un eje.

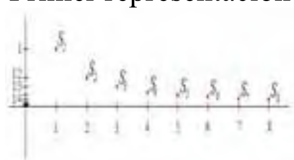
De esta manera, en la primera actividad pretendemos que los estudiantes se familiaricen con la graficación de sucesiones numéricas, para esto proponemos actividades en las que los estudiantes grafican en uno y dos ejes. Posteriormente hacemos algunas preguntas cuyo enfoque es sobre la visualización de una sucesión convergente.

Con respecto a la Segunda Actividad nuestro objetivo es que los estudiantes puedan intuir la veracidad de un enunciado sobre la convergencia de sucesiones, por lo que hemos elegido cuatro representaciones gráficas en un eje, sobre las cuales establecemos varias cuestiones enfocadas principalmente a la visualización de las propiedades de las sucesiones a las que corresponden dichas gráficas.

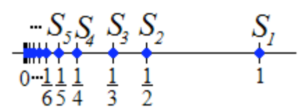
Primer Actividad

A continuación mostramos dos ejemplos de representación gráfica para la sucesión $S_n = \frac{1}{n}$, donde $(S_n)_1^{\infty} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \ldots\right)$

Primer representación



Segunda representación



I. Represента gráficamente (de las dos maneras que se muestran en el ejemplo) las sucesiones cuyos términos generales son los siguientes:

1) $U_n = \frac{n^3 - 5}{3n^3 + 1}$, 2) $U_n = (-1)^n$,

3) $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3, u_4 = -1, \ldots, u_n = 2$ para toda $n \geq 5$

4) $U_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ 5) $U_n = n + 1$

II. ¿Consideras que las sucesiones numéricas anteriores son convergentes? ¿Por qué?

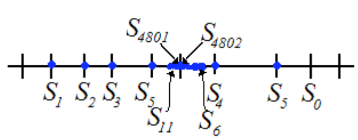
III. Realiza una representación gráfica para una sucesión numérica convergente.

IV. Escribe la definición formal correspondiente a la convergencia de una sucesión numérica.

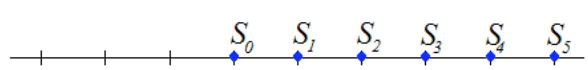
Segunda Actividad

1. Observa las siguientes representaciones gráficas de cuatro sucesiones S_n.

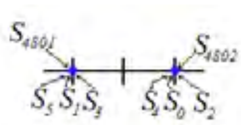
i.



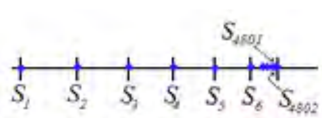
iii.



ii.



iv.



Para cada una de las representaciones anteriores contesta las siguientes preguntas. Explica ampliamente tus respuestas.

a. ¿Hay una infinidad de términos "amontonados" cerca de (ó sobre) algún término?

b. ¿Se puede encerrar en un intervalo de tamaño finito a <u>todos</u> los elementos de la sucesión?

c. Si el caso del inciso anterior se cumple para alguna de las representaciones, ¿Puede suceder que el 'intervalo' sea cada vez más pequeño y que aunque no contenga a todos los elementos, el intervalo contenga a la mayoría de los elementos de la sucesión?

d. Si el caso del inciso anterior se cumple, ¿A partir de que S_n crees que podrían estar dentro de un 'intervalo' de tamaño finito la mayoría de los términos de la sucesión?
e. Si eliges un tamaño finito para el intervalo, ¿Puedes contar cuántos elementos quedan fuera del intervalo?
f. ¿Consideras que las sucesiones a las que corresponden las representaciones gráficas anteriores son convergentes? De ser así, ¿a qué término convergen? Explica tu respuesta.

2. ¿Cuál(es) de los siguientes enunciados consideras verdadero(s)? ¿Cuáles si y cuáles no? Argumenta ampliamente tu respuesta.
   a. Si S_n es convergente, entonces S_n es acotada.
   b. Si S_n es convergente, entonces S_n no es acotada.
   c. Si S_n es acotada, entonces S_n es convergente.
   d. Si S_n es acotada, entonces S_n no es convergente.
3. Elige uno de los enunciados que consideraste verdadero en la pregunta anterior y
   a. Describe que idea(s) utilizarías para realizar su demostración.
   b. Realiza su demostración formal.

Consideraciones Finales

Con estas actividades pretendemos que profesores y estudiantes reconozcan los múltiples beneficios de la visualización, por ejemplo, el generar argumentos. Buscamos además que a través de ellas se amplíe la visión que se tiene de las matemáticas como una disciplina que no permite la representación visual de sus conceptos. Estamos conscientes de que construir conocimiento, ya sea en el área de Cálculo diferencial e Integral o del Análisis Matemático, es una tarea difícil en la que el trabajo se reduce principalmente a métodos algebraicos y algorítmicos, sin embargo creemos que una visión más amplia en la que se incluya elementos visuales para su estudio puede ayudar en esta tarea.

Reconocimientos

Agradecemos el apoyo económico brindado por medio del proyecto CONACYT 41740-S, para asistir a ésta X Escuela de Invierno en Matemática Educativa.

Referencias

Alcock L. Y Simpson A. (2005) *Convergence of sequences and series 2: interactions between nonvisual reasoning and the learner's beliefs about their own role.* Educational Studies in Mathematics, 58, 77-100.
Alcock L. y Simpson A. (2004) *Convergence of sequences and series: interactions between visual reasoning and the learner's beliefs about their own role.* Educational Studies in Mathematics, 57: 1-32.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M. y otros (eds.) *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Grupo Editorial Iberoamérica: México, 97-140.

Barrera, J. (2002). La construcción de la derivada a través de la noción de variación en estudiantes de Nivel Superior. *Acta Latinoamerica de Matemática Educativa*, 15(1), México: Grupo Editorial Iberoamérica. 67-72.

Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2), 32-115.

Cáceres, A. (1997), *Estudio exploratorio de ideas variacionales entre jóvenes escolarizados de 17 a 24 años de edad*. Tesis de maestría. Cinvestav-IPN, México.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y Lenguaje Variacional en la Introducción al Análisis. *Epsilon*, Núm. (42), 353-369.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1997). Pensamiento y Lenguaje Variacional en la Introducción al Análisis. *Epsilon*, Num. (42), 353-369.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2003). Una presentación visual del polinomio de Lagrange. *Números*. *Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas,* España 55, (pp. 3 – 22).

Cantoral R. y Montiel, G. (2001) *Funciones: visualización y pensamiento matemático,* México: Pearson Educación de México.

Cantoral, R. y Reséndiz, E. (2003). El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: Un estudio en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 6(2), 133-154.

Cantoral, R. y Reséndiz, E. (1997) *Aproximaciones sucesivas y sucesiones.* Grupo Editorial Iberoamérica.

Cauchy, A. (1994) *Curso de Análisis* (Álvarez, C. Selección, trad. y notas) México: UNAM. (Trabajo original publicado en 1821).

Cordero, F. (2005) El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 8-3, pp. 265-286

Crespo, R. (2005) Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en el aula. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8, 3, 287-317.

Dolores, C. (2000) *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada.* El futuro del Cálculo Infinitesimal. Capitulo V: ICME-8 Sevilla, España: Iberoamérica, México, DF, 155-181.

Farfán, R. (1997) *Ingeniería Didáctica: un estudio de la variación y el cambio.* Grupo Editorial Iberoamérica.

Fischbein E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach.* Holland: Reidel Publishing.

Galindo, E. (1998). *Un acercamiento a algunas Ideas del Cálculo diferencial empleando Logos y programas para graficar.* Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav, IPN, México, DF.

Polya, G. (1966) *Matemáticas y razonamiento plausible,* España, Madrid: Tecnos.

Robert, A. (1982) L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 3, 3, 305-341.